

E.T.S. DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS
ANÁLISIS MATEMÁTICO. 2^o CURSO Y ADAPTACIÓN 2010/2011
PRÁCTICA 1

1.1

(i) Se consideran los siguientes números complejos:

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^{12}}{1 - \sqrt{3}i} \quad \frac{(1 + i)^5}{1 + i^5} \quad (\sqrt{3} + i)^n + (\sqrt{3} - i)^n, n \in \mathbb{N}$$

Obtener sus módulos y sus argumentos, así como de los conjugados de dichos números y expresarlos en la forma $a + bi$. ¿ Son mayores o menores que 0 ?

(ii) Hallar $\sqrt[3]{2 + 2i}$, (raíz cúbica de $2 + 2i$). ¿ Es única ?

(iii) Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ consideramos: el conjunto A formado por todas las raíces cuartas de z^2 y el conjunto B de los cuadrados de cada una de las raíces cuartas de z . Justificar razonadamente si A es igual a B .

(iv) Resolver en $\mathbb{C}$ las ecuaciones: $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ y $(2z^2 - 5z + 10)^2 - (z^2 - z + 5)^2 = 0$.

(v) Hallar los números complejos cuyo cubo sea igual al cuadrado de su conjugado y hallar la ecuación cuyas raíces sean la soluciones del problema.

1.2

Describir geométricamente cada uno de los siguientes conjuntos:

- | | |
|---|---|
| a) $\{z \in \mathbb{C}; z - 1 - i = 1\}$ | b) $\{z \in \mathbb{C}; z - 1 + i \geq z - 1 - i \}$ |
| c) $\{z \in \mathbb{C}; z + i \neq z - i \}$ | d) $\{z \in \mathbb{C}; z + 2 > 1 + z - 2 \}$ |
| e) $\{z \in \mathbb{C}; \frac{ z-a }{ z-b } = k; a, b \in \mathbb{C} \text{ distintos}, k \in \mathbb{R}^+\}$ | f) $\{z \in \mathbb{C}; z < \cos(\arg z)\}$ |
| g) $\{z = z e^{i\theta} \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{3}{4}\pi\}$ | h) $\{z \in \mathbb{C}; \Re z < 1 \text{ ó } \Im(z - 1) \neq 0\}$ |
| i) $\{z \in \mathbb{C}; z - 1 < 1 \text{ y } z = z - 2 \}$ | j) $\{z \in \mathbb{C}; z - 2 > 3 \text{ y } z > 2\}$ |
| k) $\{z \in \mathbb{C}; \Im[\frac{z+i}{2i}] < 0\}$ | l) $\{z \in \mathbb{C}; z ^2 > z + \bar{z}\}$ |

1.3

Obtener, si existen, los siguientes límites: ($z \in \mathbb{C}$)

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{|z|^2}{z}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{\bar{z}}{z}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow -1 \\ |z| \neq 1}} \frac{z+1}{|z|-1}$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{\Re z \cdot \Im z}{|z|}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z^2 \neq \bar{z}^2}} \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z^2 - \bar{z}^2}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z + \bar{z} \neq 0}} \frac{(z - \bar{z})^2}{z + \bar{z}}$$

En caso de no existencia obtener los límites direccionales.

1.4

- (i) Estudiar la holomorfía o derivabilidad de las siguientes funciones complejas y calcular, para cada una de ellas, el valor de la derivada en los puntos $z = x + iy$ donde exista.

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1)(\bar{z}-i)^2, & f(z) &= (y^2x - \frac{2}{3}y^3) + i(x^2y - \frac{2}{3}x^3), & f(z) &= \overline{\sin z} \\ f(z) &= \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z^2 - \bar{z}^2} & f(z) &= \frac{1}{\cos z + 2} & f(z) &= (z^2 - 2)e^{-z} \\ f(z) &= \sinh(\bar{z}), & f(z) &= \frac{1}{z^2 + 2z + (1-3i)} & f(z) &= \cos\left(\frac{1}{i + e^{2z+3}}\right) \end{aligned}$$

- (ii) Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en $\mathbb{C}$. Supongamos que $v(x, y) = h(u(x, y))$ siendo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$, con derivada continua. Demostrar que entonces $f(z)$ debe ser constante en $\mathbb{C}$.
- (iii) Hallar todas las funciones holomorfas, $f(z) = f(x + iy)$, cuya parte real $u(x, y)$ sea de la forma $u(x, y) = \varphi(3x + 5y)$ siendo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable y con derivada segunda continua, a determinar. Expresar $f(z)$ en términos de z .
- (iv) Determinar una función holomorfa, si existe, tal que su parte real sea: $e^x(x \cos y - y \sin y) + \frac{x}{x^2 + y^2}$.

1.5

Determinar el dominio de convergencia de las siguientes series funcionales:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n} & \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n + 1} z^{2n} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz-1)^n}{2^{n+1}} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2n}}{n9^n \log^2(n+1)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^{2n}}{(2n+1)!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^{n!}}{n^2} & \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2in) z^n \end{aligned}$$

1.6

- (i) Sobre la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sabemos que converge en $z_0 \neq 0$. ¿Qué relación existe entre el radio de convergencia de la serie y $|z_0|$?
- (ii) Desarrollar $f(z) = \frac{4z+5}{z+1}$ y $g(z) = \frac{4z+5}{(z+1)^2}$, en potencias positivas de $z-1$ y determinar sus dominios de convergencia.
- (iii) Sea $f(z) = \frac{5z}{(z+i)^2}$, obtener el desarrollo de f en serie de potencias positivas de $z-1$ y en serie de potencias negativas de $z+i$. ¿Cuál es el valor de $f^{(10)}(1)$?
- (iv) Desarrollar la función $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$ en serie de Laurent en las regiones: $A = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ y $B = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z+1| < 2\}$.
- (v) Obtener el desarrollo de Laurent de $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-z}$, válido en $1 < |z-i| < \sqrt{2}$.

1.7

- (i) Designamos por $S(z)$ a la función definida por la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n z^{n+1}$ en su disco de convergencia. Se pide:
- (a) Calcular el radio de convergencia de la serie de potencias y su suma.
 - (b) Sea $f(z)$ la función analítica que coincide con $S(z)$ en su disco de convergencia. Determinar el lugar geométrico de los puntos z que se transforman mediante $f(z)$ en la circunferencia de centro 0 y radio $\frac{1}{2}$.
 - (c) Desarrollar $f(z)$ en serie de potencias positivas de $z - i$.
- (ii) Obtener el desarrollo de Laurent de $f(z) = -\frac{\sinh(z)}{z^3}$ en $0 < |z| < \infty$ y de $f(z) = \frac{z^2 - 2iz + 1}{z^5 - 2iz^4 - z^3}$ en $0 < |z| < 1$.
-

1.8

- (i) Dada la función $f(z) = \begin{cases} \frac{2\operatorname{sen}(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 2 & \text{si } z = 0 \end{cases}$. Demostrar que es holomorfa en algún entorno de $z = 0$ y hallar las expresiones de $f'(z)$ y $f''(z)$. Desarrollarla en serie de potencias positivas de z , y calcular su radio de convergencia.
- (ii) Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$, si B_n es la n -ésima derivada en $z = 0$ de la función $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$
-

1.9

Obtener todas las representaciones posibles de la función:

$$f(z) = \frac{3z + 1}{(1 - z)(z + 3)}$$

en serie de Laurent de potencias de z , estudiando los distintos dominios de convergencia.

1.10

- (i) Justificar razonadamente que las series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(2+2i)}{2^n}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ni^n}{2^n}$ son convergentes. Obtener, en cada caso, el número complejo resultado de dicha suma, escrito en forma binómica.
- (ii) Obtener la suma y el dominio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} (z + 4i)^n$.
- (iii) Desarrollar $g(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$ en serie de potencias positivas en un entorno de $z = 3$ y en serie de Laurent en $|z - 2| > 1$.
- (iv) Expresar la función $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} + e^z - 1}{z}$ en serie de Laurent en $0 < |z| < \infty$.
-